PART2　三角形の決定

2　△ABC において，$b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$C=45^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ。

Point Pickup

三角形の辺の長さ a，b，c，角の大きさ A，B，C のうち，3 つが与えられ，残りの辺の長さや角の大きさを求め三角形を決定する問題において，2 辺の長さとその 2 辺の間ではない角が与えられたとき，三角形が 1 つに定まらないことがある。

第 9 講　PART2 確認問題

1　△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{2}$，$C=30^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ。

$a=$ ア，$A=$ イ，$B=$ ウ　または

$a=$ エ，$A=$ オ，$B=$ カ

ただし，ア $>$ エ とする。

[ア，エ の選択肢]

① 1　② 2　③ $\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$　⑥ $\sqrt{3}-1$　⑦ $\sqrt{3}+1$

[イ，ウ，オ，カ の選択肢]

① 15°　② 30°　③ 45°　④ 60°

⑤ 75°　⑥ 90°　⑦ 105°　⑧ 120°

⑨ 135°　⑩ 150°

PART2　三角形の決定

2　△ABC において，$b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$C=45°$ のとき，a，A，B を求めよ。

余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$2^2=a^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot a\cdot(1+\sqrt{3})\cos 45°$$

$$a^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})a+2\sqrt{3}=0$$

$$(a-\sqrt{6})(a-\sqrt{2})=0 \qquad \text{よって} \quad a=\sqrt{6},\ \sqrt{2}$$

$a=\sqrt{6}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60°$，$B=180°-(45°+60°)=75°$

$a=\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$A=30°$，$B=180°-(45°+30°)=105°$

以上より　$a=\sqrt{6}$，$A=60°$，$B=75°$　または　$a=\sqrt{2}$，$A=30°$，$B=105°$

第9講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑦，イ：⑦，ウ：③，エ：⑥，オ：①，カ：⑨

[解説]

余弦定理より　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$(\sqrt{2})^2=a^2+2^2-2a\cdot 2\cos 30^\circ$$

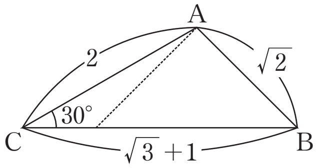
$$2=a^2+4-4a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2-2\sqrt{3}a+2=0$$

解の公式より

$$a=\sqrt{3}\pm 1$$ [A]

(i)　$a=\sqrt{3}+1$ のとき



余弦定理より

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}$$ [B]

$$=\frac{2+4+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=45^\circ$ [C]

ゆえに

$$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)$$
$$=105^\circ$$

[A]　2辺の長さと，その2辺の間ではない角が与えられたとき，三角形が1つに定まらないことがある。このようなときは，2通りの三角形を求める必要がある。

[B]　余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$\Longleftrightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

[C]　B を正弦定理で求める別解

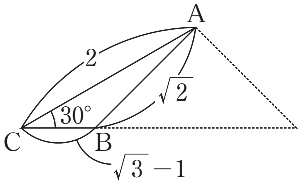
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=45^\circ,\ 135^\circ$

(ii)　$a=\sqrt{3}-1$のとき



余弦定理より

$\cos B$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{2+4-2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$B=135°$ [C]

ゆえに　$A=180°-(135°+30°)=15°$

(i), (ii)より

$a=\sqrt{3}+1$，$A=105°$，$B=45°$　または

$a=\sqrt{3}-1$，$A=15°$，$B=135°$